



إعداد و تصميم



محمود عوض حسن

معلم أول رياضيات

تساوى زوجين مرتبين

• الزوج المرتب: (أ، ب) يسمى زوج مرتب

يسمى أ: المسقط الأول أو الإحداثي السيني

يسمى ب: المسقط الثاني أو الإحداثي الصادي

♦ (أ، ب) ≠ (ب، أ) فمثلا (٢، ٥) ≠ (٥، ٢)

♦ (٣، ١) يسمى زوج مرتب بينما {٣، ١} تسمى مجموعة

■ إذا تساوى زوجين مرتبين فإن :

المسقط الأول = المسقط الأول ، المسقط الثاني = المسقط الثاني

فمثلا: إذا كان (٣، ٥) = (س، ص) فإن: س = ٥ ، ص = ٣

أيضا: إذا كان (١٠، ٢ - س) = (٧، ٢ + ص) فإن س - ٧ = ٢ - س ← س = ٩ ، ص + ٢ = ١٠ ← ص = ٨

مثال 2

إذا كانت (٣٢، $\sqrt[3]{27}$) = (١ + ص، س°)

فأوجد قيمة كل من س، ص

$$س° = ٣٢ \therefore س° = ٢°$$

$$\therefore س = ٢$$

$$ص + ١ = \sqrt[3]{27} \therefore ص + ١ = ٣$$

$$\therefore ص = ٢$$

مثال ١

إذا كانت (١١، ١ - س) = (٨، ٣ + ص)

فأوجد قيمة $\sqrt{٢ + ص}$

الحل

$$س - ١ = ٨ \therefore س = ٩$$

$$ص + ٣ = ١١ \therefore ص = ٨$$

$$\therefore \sqrt{٢ + ص} = \sqrt{٢ + ٨} = \sqrt{١٠}$$

$$= \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

تمرين

إذا كانت: (٨، ب - ١) = (٣، ٥ + أ)

فإن أ = ، ب =

حاصل الضرب الديكارتي

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين غير خاليتين S ، V

- حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين S ، V يكتب $S \times V$ ويقرأ S ضرب V
- $S \times V$: هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول ينتمي للمجموعة S ومسقطها الثاني ينتمي للمجموعة V .

أي أن: $S \times V = \{ (أ، ب) : أ \in S، ب \in V \}$

- فمثلاً: إذا كانت $S = \{ ١، ٣ \}$ ، $V = \{ ٢، ٤، ٦ \}$

$$\text{فإن : } S \times V = \{ ١، ٣ \} \times \{ ٢، ٤، ٦ \}$$

$$= \{ (١، ٢)، (١، ٤)، (١، ٦)، (٣، ٢)، (٣، ٤)، (٣، ٦) \}$$

$$\text{بينما } V \times S = \{ ٢، ٤، ٦ \} \times \{ ١، ٣ \}$$

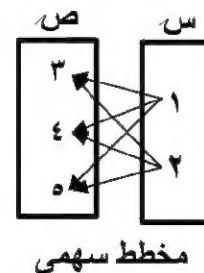
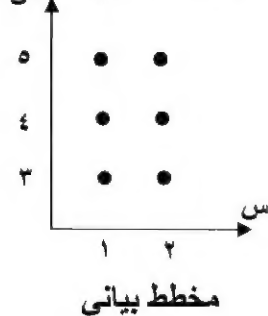
$$= \{ (٢، ١)، (٢، ٣)، (٤، ١)، (٤، ٣)، (٦، ١)، (٦، ٣) \}$$

- لاحظ أن: $S \times V \neq V \times S$
- يمكن تمثيل $S \times V$ كمخطط سهمي ومخطط بياني كما في المثال التالي.

مثال إذا كانت $S = \{ ١، ٢ \}$ ، $V = \{ ٣، ٤، ٥ \}$

فأوجد $S \times V$ ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني

الحل : $S \times V = \{ (١، ٣)، (١، ٤)، (١، ٥)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥) \}$

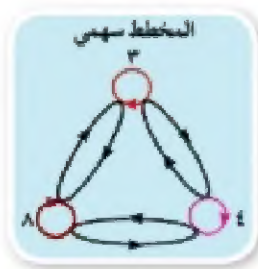


حاصل الضرب الديكارتي $S \times S$ أو S^2

- إذا كانت $S = \{ ٣، ٤، ٨ \}$

$$\text{فإن : } S \times S = S \times S = \{ ٣، ٤، ٨ \} \times \{ ٣، ٤، ٨ \}$$

$$= \{ (٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٨)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٤، ٨)، (٨، ٣)، (٨، ٤)، (٨، ٨) \}$$



عدد العناصر: يرمز له بالرمز ن

- ♦ إذا كانت $S = \{5, 2\}$ فإن عدد عناصر $S = 2$ وتكتب $N(S) = 2$
- ♦ إذا كانت $S = \{4\}$ فإن $N(S) = 1$ وليس 4

القاعدة: $N(S \times V) = N(S) \times N(V)$

فمثلاً: إذا كانت $N(S) = 4$ ، $N(V) = 5$ فإن $N(S \times V) = 4 \times 5 = 20$
 أيضاً: إذا كانت $S = \{3, 1\}$ ، $V = \{6, 4, 2\}$ فإن $N(S \times V) = 2 \times 3 = 6$

العمليات على المجموعات

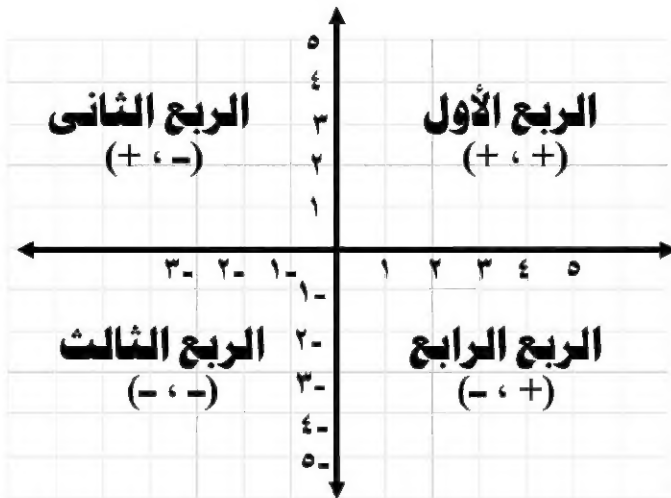
إذا كانت $S = \{3, 2\}$ ، $V = \{5, 4, 3\}$ فإن:

- ♦ **التقاطع** \cap : $S \cap V = \{3\}$ ← خذ المكرر
- ♦ **الاتحاد** \cup : $S \cup V = \{5, 4, 3, 2\}$ ← خذ الكل ، والمكرر مرة واحدة
- ♦ **الفرق** $-$: $S - V = \{2\}$ ← خذ الموجود في S ومش موجود في V
 $V - S = \{5, 4\}$ ← خذ الموجود في V ومش موجود في S

الشبكة التربيعية المتعامدة

- تنقسم الشبكة التربيعية إلى 4 أرباع ومحور سينات ومحور صادات
- يمكن التعرف على الربع الذي تقع فيه أي نقطة من إشارتي إحداثيها كما بالشكل.
- إذا كان الإحداثي السيني = صفر فإن النقطة تقع على محور الصادات مثل $(0, 3)$
- إذا كان الإحداثي الصادي = صفر فإن النقطة تقع على محور السينات مثل $(2, 0)$

مثال



- ❖ النقطة $(2, 5)$ تقع في الربع الأول
- ❖ النقطة $(3, -2)$ تقع في الربع الثاني
- ❖ النقطة $(-4, -3)$ تقع في الربع الثالث
- ❖ النقطة $(-3, 1)$ تقع في الربع الرابع
- ❖ النقطة $(2, 0)$ تقع على محور الصادات
- ❖ النقطة $(0, 4)$ تقع على محور السينات
- ❖ النقطة $(0, 0)$ تسمى نقطة الأصل "و"

أولئك

- ♦ النقطة $(-6, 5)$ تقع
- ♦ النقطة $(-2, 0)$ تقع
- ♦ النقطة $(4, 3)$ تقع
- ♦ النقطة $(2, -3)$ تقع
- ♦ النقطة $(-7, -4)$ تقع
- ♦ النقطة $(0, 5)$ تقع

١

إذا كانت $س \times ص = \{ (٧, ٢), (٥, ٢), (٢, ٢) \}$
أوجد : (١) $ص$ (٢) $س \times ص$
(٣) $ن (ص')$

الحل

$$ص = \{ ٧, ٥, ٢ \}$$

$$س \times ص = \{ (٢, ٧), (٢, ٥), (٢, ٢) \}$$

$$ن (ص') = ٣ \times ٣ = ٩$$

٢

إذا كانت $س = \{ ٤, ٣ \}$ ، $ص = \{ ٥, ٤ \}$
ع = $\{ ٥, ٦ \}$ فأوجد :
(١) $س \times (ص \cap ع)$ (٢) $(س - ص) \times ع$

الحل

التجهيز: $(ص \cap ع) = \{ ٥ \}$ ، $س - ص = \{ ٣ \}$

$$س \times (ص \cap ع) = \{ ٥ \} \times \{ ٤, ٣ \}$$

$$= \{ (٥, ٤), (٥, ٣) \}$$

$$(س - ص) \times ع = \{ ٣ \} \times \{ ٥, ٦ \}$$

$$= \{ (٣, ٥), (٣, ٦) \}$$

٣

إذا كانت $س = \{ ٥, ٢ \}$ ، $ص = \{ ٢, ١ \}$
ع = $\{ ٣ \}$ فأوجد :
(١) $ن (س \times ع)$ (٢) $(ص \cap س) \times ع$

الحل

$$ن (س \times ع) = ن (س) \times ن (ع) = ٢ \times ١ = ٢$$

$$٢ = ن (س \cap ع) \quad \text{التجهيز: } (ص \cap س) = \{ ٢ \}$$

$$(ص \cap س) \times ع = \{ ٢ \} \times \{ ٣ \} = \{ (٢, ٣) \}$$

٤

إذا كانت $س = \{ ٦, ٥, ١ \}$ ، $ص = \{ ٥, ٤, ٢ \}$
فأوجد : (١) $س \times ص$ ومثله بمخطط سهمي
(٢) $ن (س \times ص)$

الحل

$$س \times ص = \{ (١, ٤), (٦, ٢), (٥, ٢), (١, ٢) \}$$

$$\{ (٦, ٥), (٥, ٥), (١, ٥), (٦, ٤), (٥, ٤) \}$$

مثل المخطط بنفسك

$$ن (س \times ص) = ن (س) \times ن (ص) = ٣ \times ٣ = ٩$$

٥

إذا كانت $س = \{ ٣, ٢ \}$ ، $ص = \{ ٥, ٤, ٣ \}$
فأوجد : (١) $س \times ص$
(٢) $(س \times ص) \cap ص'$

الحل

$$س \times ص = \{ (٣, ٣), (٥, ٢), (٤, ٢), (٣, ٢) \}$$

$$\{ (٥, ٣), (٤, ٣) \}$$

$$ص' = \{ (٤, ٤), (٣, ٤), (٥, ٣), (٤, ٣), (٣, ٣) \}$$

$$\{ (٥, ٥), (٤, ٥), (٣, ٥), (٥, ٤) \}$$

$$(س \times ص) \cap ص' = \{ (٥, ٣), (٤, ٣), (٣, ٣) \}$$

العلاقة ع

- العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص هي مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي س × ص.
- يتم اختيار أزواج بيان العلاقة من أزواج الضرب الديكارتي حسب شرط معين يعطى لك في المسألة
- المقصود بجملة أ ع ب : أي علاقة أ ، ب حيث أ هي المسقط الأول ، ب هي المسقط الثاني في الأزواج المرتبة
- إذا كانت العلاقة من س إلى ص : فإن المسقط الأول س ، المسقط الثاني ب ص

تدريب

إذا كانت س = { ٥ ، ٣ ، ٢ } ،
ص = { ١٠ ، ٨ ، ٦ ، ٤ ، ٣ } وكانت ع علاقة
من س إلى ص حيث أ ع ب تعني أن $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ب
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي

الحل

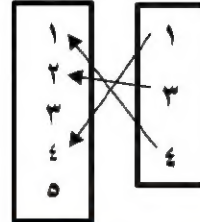
اختر الأزواج التي فيها المسقط الأول نصف الثاني
بيان ع =

مثال ١

إذا كانت س = { ٤ ، ٣ ، ١ } ،
ص = { ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ } وكانت ع علاقة من
س إلى ص حيث أ ع ب تعني أن $٥ = ٤ + ١ = ٥$
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي

إعمل س × ص في دماغك واختار منها الأزواج التي
ينطبق عليها الشرط $٥ = ٤ + ١ = ٥$ يعني المسقط الأول +
المسقط الثاني = ٥

بيان ع = { (١، ٤) ، (٢، ٣) ، (٤، ١) }



متي تكون العلاقة دالة ؟!

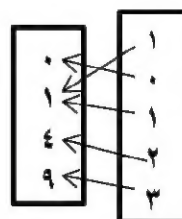
- ◆ يمكن أن تكون العلاقة دالة ويمكن أن تكون ليست دالة، فكل دالة هي علاقة وليست كل علاقة دالة.
- ◆ يقال لعلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص أنها دالة إذا تحقق الآتي:
- ❖ إذا ظهر كل عنصر من عناصر س كمسقط أول مرة واحدة فقط (في بيان ع)
- ❖ أو إذا خرج من كل عنصر من عناصر س سهم واحد فقط (في المخطط السهمي)
- ◆ إذا كانت العلاقة دالة فإن الدالة لها مدى: ومدى الدالة هو عناصر المسقط الثاني في بيان العلاقة
- إذا كانت العلاقة ليست دالة فإنه ليس لها مدى

١

إذا كانت $S = \{3, 2, 1, 0, -1\}$ وكانت $E = \{9, 6, 4, 1, 0\}$ وكانت ع علاقة من S إلى S حيث أ ع ب تعنى أن "أ = ب" اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي، وهل ع دالة أم لا ، ولماذا؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها.

الحل

بيان ع = $\{(9, 3), (4, 2), (1, 1), (0, 0), (1, -1)\}$



• ع دالة

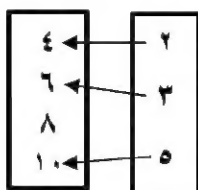
- لأن كل عنصر من S خرج منه سهم واحد فقط .
- أو لأن كل عنصر من S ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط .
- المدى = $\{9, 4, 1, 0\}$

٢

إذا كانت $S = \{5, 3, 2\}$ وكانت $E = \{10, 8, 6, 4\}$ وكانت ع علاقة من S إلى S حيث أ ع ب تعنى أن "أ = ب" اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي (١) بين أن ع دالة واكتب مداها (٢)

الحل

بيان ع = $\{(10, 5), (6, 3), (4, 2)\}$



• ع دالة

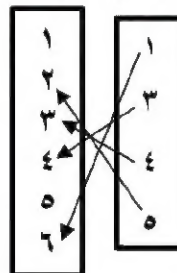
- لأن كل عنصر من S خرج منه سهم واحد فقط .
- المدى = $\{10, 6, 4\}$

٣

إذا كانت $S = \{5, 4, 3, 1\}$ وكانت $E = \{6, 5, 4, 3, 2, 1\}$ وكانت ع علاقة من S إلى S حيث أ ع ب تعنى أن $A + B = 7$ اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي (١) بين أن ع دالة واكتب مداها (٢)

الحل

بيان ع = $\{(2, 5), (3, 4), (4, 3), (6, 1)\}$



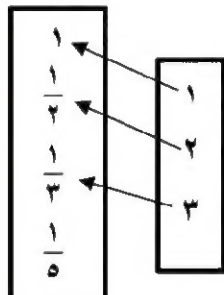
• ع دالة

- لأن كل عنصر من S خرج منه سهم واحد فقط .
- المدى = $\{6, 4, 3, 2\}$

٤

إذا كانت $S = \{3, 2, 1\}$ وكانت $E = \{\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1\}$ وكانت ع علاقة من S إلى S حيث أ ع ب تعنى أن العدد أ هو المعكوس الضربي للعدد ب اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي (١) بين أن ع دالة واكتب مداها (٢)

بيان ع = $\{(\frac{1}{3}, 3), (\frac{1}{4}, 2), (1, 1)\}$



• ع دالة

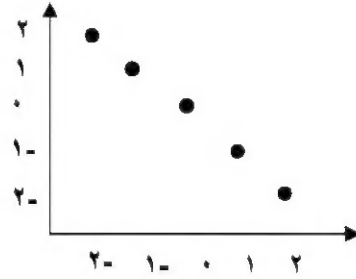
- لأن كل عنصر من S خرج منه سهم واحد فقط .
- المدى = $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1\}$

٥

إذا كانت $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ وكانت E علاقة معرفة على S حيث $A \in B$ تعني أن العدد A معكوس جمعي للعدد B اكتب بيان E ومثلها بمخطط بياني هل E دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها

الحل

بيان $E = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (2, -2)\}$



- E دالة
- لأن كل عنصر من S ظهر في بيان E كمسقط أول مرة واحدة فقط.

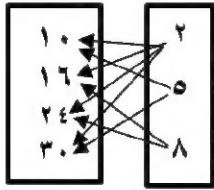
• المدى $= \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

٦

إذا كانت $S = \{2, 5, 8\}$ ، $V = \{10, 16, 24, 30\}$ وكانت E علاقة من S إلى V حيث $A \in B$ تعني أن " A عامل من عوامل B " لكل $A \in S$ ، $B \in V$ اكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمي. هل E دالة؟ ولماذا؟

الحل

بيان $E = \{(2, 10), (2, 16), (2, 24), (2, 30), (5, 10), (5, 16), (5, 24), (5, 30), (8, 24), (8, 30)\}$



- E ليست دالة
- لأنه يوجد عنصر من S خرج منه أكثر من سهم.
- لاحظ هنا أنه لا يوجد مدى لأن العلاقة ليست دالة.

٧

إذا كانت $S = \{1, 3, 5\}$ وكانت E علاقة معرفة على S وكان بيان $E = \{(1, 5), (3, 1), (5, 3)\}$ أوجد مدى الدالة
(٢) أوجد القيمة العددية للمقدار $A + B$

الحل

مدى الدالة هو الأرقام الموجودة في المسقط الثاني

المدى $= \{1, 3, 5\}$

العلاقة دالة يبقى لازم كل عنصر من S يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط ..
العنصر ١ ظهر يبقى A ، B هما ٣، ٥

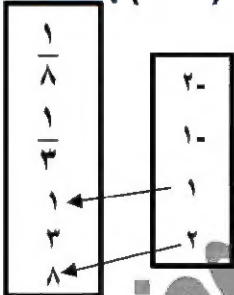
$$A + B = 3 + 5 = 8$$

٨

إذا كانت $S = \{-2, -1, 1, 2\}$ ، $V = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{3}, 1, 3, 8\}$ وكانت E علاقة من S إلى V حيث $A \in B$ تعني أن " $A = 3B$ " اكتب بيان E ومثلها بمخطط سهمي، وهل E دالة أم لا ، ولماذا؟

الحل

بيان $E = \{(-2, 1), (-1, \frac{1}{3})\}$



- E ليست دالة
- لأنه يوجد عنصر من S لم يخرج منه سهم.

الدالة

- يرمز للدالة بالرمز د أو ر أو ق
- إذا كانت د دالة من س إلى ص فإنها تكتب د : س ← ص ويكون :
 - ❖ **المجال**: هو عناصر المجموعة س
 - ❖ **المجال المقابل**: هو عناصر المجموعة ص
 - ❖ **المدى**: هو مجموعة صور عناصر المجال (وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل)
- قاعدة الدالة: تكون مثل: د(س) = ٢س ، د(س) = ١ + س ، د(س) = ٢س + ١ - ٣ وهكذا
- لاحظ أن : د(س) هي نفسها ص أي أن : د(س) = ص

مثال ٢ إذا كان بيان الدالة د = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) } ،
 { (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٩) ، (٥ ، ١١) } ،
 فأوجد : ١- مجال ومدى الدالة
 ٢- قاعدة الدالة

- ◆ مجال الدالة = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }
- ◆ مدى الدالة = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ }
- ◆ قاعدة الدالة هي : د(س) = ٢س + ١

مثال ١ إذا كانت د : س ← ص ، س = { ٣ ، ٥ ، ٧ } ،
 ص = { ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ٢١ } ،
 بيان د = { (٣ ، ٩) ، (٥ ، ١٥) ، (٧ ، ٢١) } ،
 فأوجد : ١- مجال الدالة ٢- المجال المقابل
 ٣- مدى الدالة ٤- قاعدة الدالة

الحل

- ١- مجال الدالة = { ٣ ، ٥ ، ٧ }
- ٢- المجال المقابل = { ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ٢١ }
- ٣- مدى الدالة = { ٩ ، ١٥ ، ٢١ }
- ٤- قاعدة الدالة هي : د(س) = ٣س

ملاحظات على التعويض في الدالة

- عند التعويض عن عدد سالب في س^٢ نضع العدد بين قوسين فمثلاً إذا كانت س = -٣ فإن س^٢ = (-٣)^٢ = ٩
- يمكن التعويض في قاعدة الدالة عن قيمة س أو قيمة ص أو كلاهما ويمكن الاستعانة بالآتي:
- ١ إذا كان (٢ ، ٥) ينتمي لبيان الدالة: فإننا نعوض في قاعدة الدالة عن س = ٢ ، د(س) أو ص = ٥
- ٢ إذا كان د(٣) = ٧ فإننا نعوض في قاعدة الدالة عن س = ٣ ، د(س) أو ص = ٧

مسائل على التعويض في الدالة

١

إذا كانت د(س) = ٤س + ب وكان د(٣) = ١٥
أوجد قيمة ب

الحل

د(٣) = ١٥ معناها انك لما تعوض في الدالة عن
س = ٣ الناتج هيساوى ١٥
 $١٥ = ٤ \times ٣ + ب$
 $١٥ = ١٢ + ب \therefore ب = ٣$

٢

إذا كانت النقطة (أ، ٣) تقع على الخط المستقيم
الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د(س) = ٤س - ٥
فأوجد قيمة أ

الحل

من الزوج (أ، ٣) نأخذ س = أ ، د(س) = ٣
بالتعويض في الدالة
 $٣ = ٤ - أ$
 $٤ = أ - ٣ \leftarrow ٥ + ٣ = أ - ٤$
 $٨ = أ - ٤ \therefore أ = ٢$

٣

إذا كانت د(س) = ٣س - ٢ ، ر(س) = ٣ - س
فأوجد د(٢) + ر(٢)

الحل

د(٢) = (٢) (٢) = ٢(٢) - ٢ = ٢(٢) - ٢ = ٢
ر(٢) = (٢) (٢) = ٣ - ٢ = ١
ر(٣) = (٢) (٢) = ٣ - ٢ = ١
د(٢) + ر(٢) = (٢) (٢) + (٢) (٢) = ٢ + ١ = ٣

٤

إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث
د(س) = ٦س - أ يقطع محور الصادات في النقطة
(ب، ٣) فأوجد قيمتى أ، ب

الحل

المستقيم يقطع محور الصادات ب = ٠
من الزوج (ب، ٣) نعوض عن س = ٠ ، ص = ٣
 $٣ = ٦ \times ٠ - أ$
 $٣ = -أ \leftarrow ٣ = أ$

٥

إذا كانت س = { ٠، ١، ٣، ٤، ٥، ٧ } ، ص = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ }
وكانت د : س ← ص حيث د(س) = ٥ - س
فأوجد صور عناصر س بالدالة د .

الحل

لإيجاد صور عناصر س نعوض في الدالة عن قيم س
د(٠) = ٥ - ٠ = ٥
د(١) = ٥ - ١ = ٤
د(٣) = ٥ - ٣ = ٢
 \therefore صور عناصر س (هي المدى) = { ٥، ٤، ٢ }

الحل

نعوض في الدالة د(س) = ٩ - س عن قيم المجموعة س
د(٢) = ٩ - ٢ = ٧
د(٣) = ٩ - ٣ = ٦
د(٤) = ٩ - ٤ = ٥
بيان د = { (٢، ٧)، (٣، ٦)، (٤، ٥) }
المدى = { ٥، ٦، ٧ }

◆ الدالة كثيرة الحدود هي دالة تتكون من حد أو أكثر ويجب توافر شرطان لتكون كثيرة حدود وهما:

١ كل من المجال والمجال المقابل للدالة هو ح

٢ أسس المتغير s ≥ 0 ، أي لا يوجد بالدالة كثيرة الحدود جذر أو مجهول في المقام أو أس سالب

◆ أمثلة لدوال كثيرات حدود:

مثل: $(s) = s^2 + 1$ ، $(s) = s^3 + 2s - 2$ ، $(s) = s^3 - 8$

◆ أمثلة لدوال ليست كثيرات حدود :

مثل: $(s) = s^2 + \sqrt{s} + 8$ ، $(s) = s(s + \frac{1}{s} + 2)$

درجة الدالة

هي درجة أكبر أس في الدالة (بعد التبسيط)

- الدالة د: $(s) = s^4 + 2s^3 + 5$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة
- الدالة د: $(s) = s^2 + 2s - 1$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية (تسمى دالة تربيعية)
- الدالة د: $(s) = s + 3$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى (تسمى دالة خطية)
- الدالة د: $(s) = 7$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية (تسمى دالة ثابتة)

مثال ١: الدالة د: $(s) = s^2(s + 2)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة

الحل: نبسط الدالة فتكون: $(s) = s^3 + 2s^2$ ∴ دالة من الدرجة الثالثة

مثال ٢: الدالة د: $(s) = s^2 - (s^3 + s - 1)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة

الحل: نبسط الدالة فتكون: $(s) = s^2 - s^3 - s + 1 = 1 - s^3 - s + s^2$ ∴ دالة من الدرجة الأولى

مثال ٢: إذا كانت $(s) = s^2 - 5s + 2$ (١) اذكر درجة الدالة د (٢) اثبت أن د (٢) = د ($\frac{1}{2}$)

الحل

■ الدالة د من الدرجة الثانية

■ د (٢) = $2^2 - 5 \times 2 + 2 = 2 - 8 + 2 = -4$ = صفر

د ($\frac{1}{2}$) = $(\frac{1}{2})^2 - 5(\frac{1}{2}) + 2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 2 = -\frac{3}{4}$ = صفر

∴ د (٢) = د ($\frac{1}{2}$)

مثال ١: إذا كان $(s) = s^2 - s + 3$ فأوجد: د (٢-) ، د (٠) ، د ($\sqrt[3]{3}$)

الحل

عوض ثم استعن بالآلة الحاسبة

د (٢-) = $(2-)^2 - (2-) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$

د (٠) = $0^2 - 0 + 3 = 3$

د ($\sqrt[3]{3}$) = $(\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3} + 3 = \sqrt[3]{3} - 12 = 3 + \sqrt[3]{3} - 9 = \sqrt[3]{3} - 6$

◆ الدالة الخطية هي دالة من الدرجة الأولى

مثل: د(س) = ٢س ، د(س) = س - ١ ، د(س) = ٥س + ٣

◆ تكون على الصورة د(س) = أس + ب حيث $أ \neq ٠$ وتمثل بيانيا بخط مستقيم بحيث يكون:

➤ نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، ب)

➤ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي $(٠ ، -\frac{ب}{أ})$

فمثلا: إذا كانت د(س) = ٢س - ٥ فإن $أ = ٢$ ، $ب = -٥$ ومنها فإن:

➤ نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، -٥)

➤ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي $(٠ ، \frac{٥}{٢})$

◆ وبطريقة أخرى يمكن إيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات بالتعويض عن س = ٠ ونقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات بالتعويض عن ص = ٠

❖ إذا كان المستقيم الممثل للدالة يقطع محور السينات ← نفهم أن المسقط الثانى ص = صفر

❖ إذا كان المستقيم الممثل للدالة يقطع محور الصادات ← نفهم أن المسقط الأول س = صفر

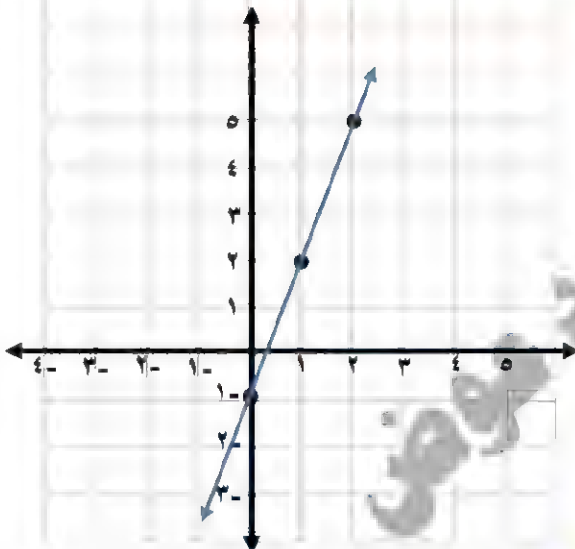
مثال

مثل بيانيا الدالة د(س) = ٣س - ١
وأوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محوري الإحداثيات

الحل

في الدالة الخطية نفرض أى ٣ قيم لـ س

س	٣س - ١	ص
٠	٣ × ٠ - ١	-١
١	٣ × ١ - ١	٢
٢	٣ × ٢ - ١	٥



من قاعدة الدالة: $أ = ٣$ ، $ب = -١$

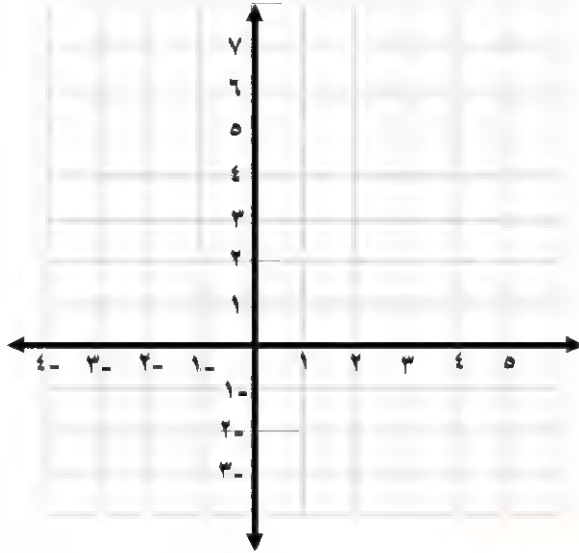
∴ نقطة التقاطع مع محور السينات $(٠ ، -\frac{ب}{أ})$ هي $(٠ ، \frac{١}{٣})$

، نقطة التقاطع مع محور الصادات (ب ، ٠) هي (٠ ، -١)

تدريب ١

مثل بيانيا الدالة د: $د(س) = ٢س - ٣$
وأوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محوري الإحداثيات

الحل



س	$٢س - ٣$	ص

الدالة الثابتة

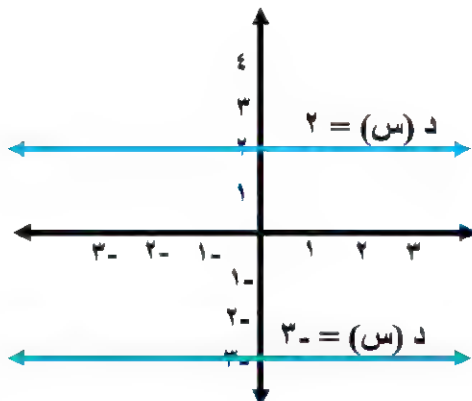
❖ الدالة د: $ح ← ح$ حيث د(س) = ب ، ب د ح تسمى دالة ثابتة وهي من الدرجة الصفرية

مثل: د(س) = ٧ ، د(س) = ٥ ، د(س) = ٢ وهكذا

❖ إذا كانت د(س) = ٥ فإن د(١) = ٥ ، د(٥) = ٥ ، د(٥-) = ٥ ، د(٠) = ٥ وهكذا

فمثلا: إذا كانت د(س) = ٧ فإن د(٣) + د(٣-) = ٧ + ٧ = ١٤

❖ الدالة الثابتة تمثل بيانيا بخط مستقيم يوازي محور السينات



الحل

◆ مثال ١: مثل بيانيا الدالة د(س) = ٢

◆ مثال ٢: مثل بيانيا الدالة د(س) = ٣-

❖ الدالة التربيعية هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية

❖ الدالة د: ح حيث $د(س) = أس^2 + ب س + ج$ تسمى دالة تربيعية

مثل: $د(س) = س^2$ ، $د(س) = -س^2$ ، $د(س) = س^2 - ٥$ ، $د(س) = س^2 - ٢ س + ١$

ملاحظات هامة

❶ إذا كان معامل $س^2$ موجب فإن المنحنى يكون مفتوح لأعلى وله قيمة صغرى

❷ إذا كان معامل $س^2$ سالب فإن المنحنى يكون مفتوح لأسفل وله قيمة عظمى

❸ رأس المنحنى: تحدد من الرسم أو من قاعدة الدالة $د(س) = أس^2 + ب س + ج$ بالقانون:

$$\text{نقطة رأس المنحنى} = \left(-\frac{ب}{٢أ} , -\frac{ب^2}{٤أ} \right)$$

❹ من نقطة رأس المنحنى نأخذ:

- قيمة س هي معادلة محور التماثل
- قيمة ص هي القيمة الصغرى أو العظمى

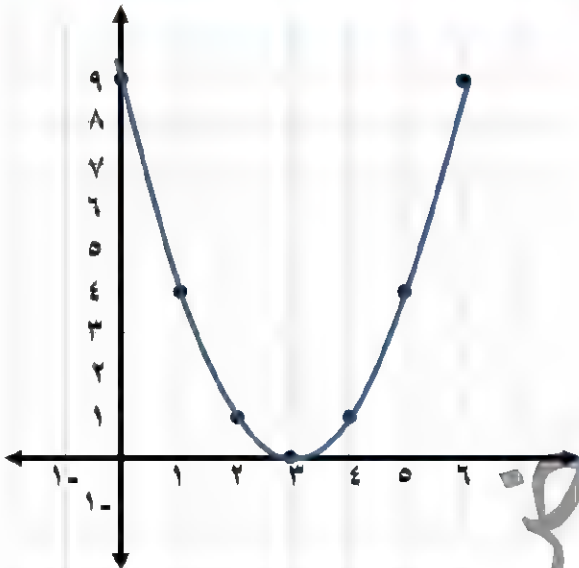
مثال ١

مثل بيانها الدالة $د(س) = (س - ٣)^2$ متخذاً س $∈ [٠, ٦]$

ومن الرسم استنتج:

(١) نقطة رأس المنحنى (٢) القيمة الصغرى أو العظمى (٣) معادلة محور التماثل

الحل



س	$(س - ٣)^2$	ص
٠	$(٣ - ٠)^2$	٩
١	$(٣ - ١)^2$	٤
٢	$(٣ - ٢)^2$	١
٣	$(٣ - ٣)^2$	٠
٤	$(٣ - ٤)^2$	١
٥	$(٣ - ٥)^2$	٤
٦	$(٣ - ٦)^2$	٩

رأس المنحنى $(٣, ٠)$

معادلة محور التماثل $س = ٣$

القيمة الصغرى ٠

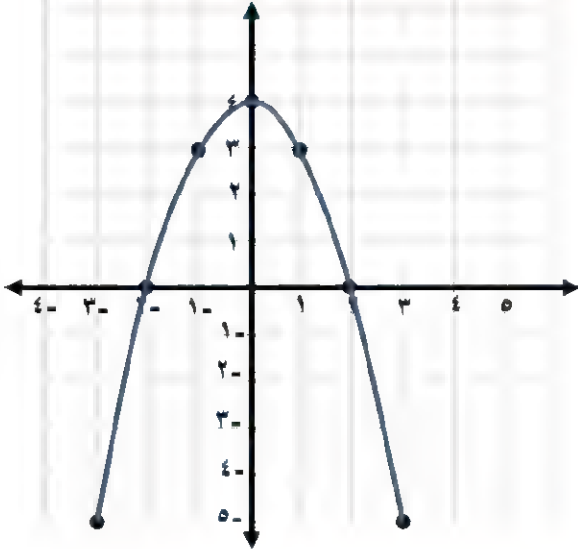
مثال ٢

مثل بيانيا الدالة $D(s) = s^2 - 4$ متخذاً $s \in [-3, 3]$

ومن الرسم استنتج :

(٢) نقطة رأس المنحنى (٢) القيمة الصغرى أو العظمى (٣) معادلة محور التماثل

الحل



ص	$s^2 - 4$	س
٥-	$(-3)^2 - 4$	٣-
٠	$(-2)^2 - 4$	٢-
٣	$(-1)^2 - 4$	١-
٤	$(0)^2 - 4$	٠
٣	$(1)^2 - 4$	١
٠	$(2)^2 - 4$	٢
٥-	$(3)^2 - 4$	٣

رأس المنحنى $(0, -4)$

معادلة محور التماثل $s = 0$

القيمة العظمى -4

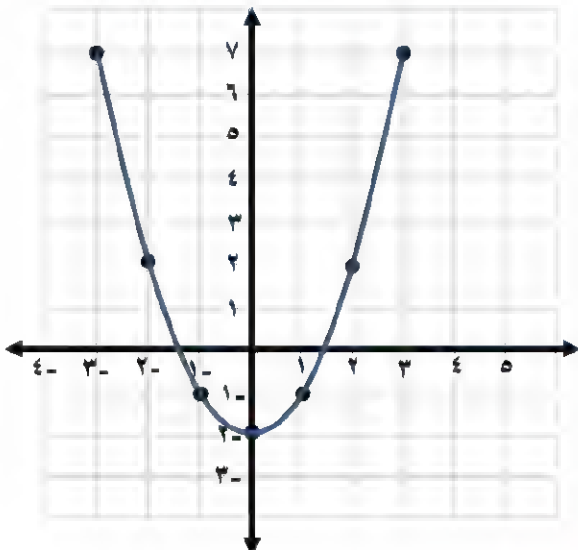
مثال ٣

مثل بيانيا الدالة $D(s) = s^2 - 2$ متخذاً $s \in [-3, 3]$

ومن الرسم استنتج :

(٣) نقطة رأس المنحنى (٢) القيمة الصغرى أو العظمى (٣) معادلة محور التماثل

الحل



ص	$s^2 - 2$	س
٧	$(-3)^2 - 2$	٣-
٢	$(-1)^2 - 2$	١-
٢-	$(0)^2 - 2$	٠
١-	$(1)^2 - 2$	١
٢	$(2)^2 - 2$	٢
٧	$(3)^2 - 2$	٣

رأس المنحنى $(0, -2)$

معادلة محور التماثل $s = 0$

القيمة الصغرى -2

تدريب ١ مثل بيانيا الدالة $D(s) = s^2 + 2s + 1$ متخذاً $s \in [-4, 2]$ ومن الرسم استنتج :
 (١) نقطة رأس المنحنى (٢) القيمة الصغرى أو العظمى (٣) معادلة محور التماثل

ص	$s^2 + 2s + 1$	س

رأس المنحنى =

معادلة محور التماثل:

القيمة الصغرى =

تدريب ٢ مثل بيانيا الدالة $D(s) = s^2 - 3s$ متخذاً $s \in [-3, 3]$ ومن الرسم استنتج :
 (١) نقطة رأس المنحنى (٢) معادلة محور التماثل (٣) القيمة الصغرى أو العظمى

ص	$s^2 - 3s$	س
-٩	$-(3-)^2$	-٣

رأس المنحنى =

معادلة محور التماثل:

القيمة الصغرى =

أسئلة اختر على الوحدة الأولى

- ١ إذا كان $(٢، س) = (١-، ص) = (٠، ص) =$ فإن $س + ص =$
 (أ) ٣ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣-
- ٢ إذا كانت $(س-، ١) = (١١، ٨) = (٣+ص، ٨)$ فإن $\sqrt{س+٢ص} =$
 (أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ٩ (د) ٢٥
- ٣ إذا كان $(٥، ٣) \in \{٦، ٣\} \times \{٨، س\}$ فإن $س =$
 (أ) ٨ (ب) ٦ (ج) ٥ (د) ٣
- ٤ النقطة $(٤، ٣-)$ تقع في الربع
 (أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع
- ٥ إذا كانت $س = \{٢\}$ ، $ص = \{٣\}$ فإن $س \times ص =$
 (أ) ٦ (ب) $\{٣\}$ (ج) $(٣، ٢)$ (د) $\{(٣، ٢)\}$
- ٦ إذا كان $ن (س) = ٣$ ، $ن (س \times ص) = ١٢$ فإن $ن (ص) =$
 (أ) ٤ (ب) ٩ (ج) ١٥ (د) ٣٦
- ٧ إذا كان $ن (س) = ٢$ ، $ن (ص \times س) = ٦$ فإن $ن (ص) =$
 (أ) ٤ (ب) ٩ (ج) ١٦ (د) ١٢
- ٨ إذا كانت $ن (س) = ٩$ فإن $ن (س) =$
 (أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٩ (د) ١٢
- ٩ إذا كانت النقطة $(س-٢، ٤-)$ تقع في الربع الثالث فإن $س =$
 (أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٦
- ١٥ إذا كانت النقطة $(٥، ب-٧)$ تقع على محور السينات فإن $ب =$
 (أ) ٢ (ب) ٥ (ج) ٧ (د) ١٢
- ١١ إذا كانت $د(س) = ٧$ فإن $د(٣-) =$
 (أ) ٧ (ب) ٧- (ج) ٢١ (د) ٢١-
- ١٢ الدالة $د : د(س) = ٣$ س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة
 (أ) $(٣-، ٠)$ (ب) $(٠، ٠)$ (ج) $(٠، ٣)$ (د) $(٣، ٣)$

نص
معلم أول رياضيات
مدعو عوش

الحل

- المنحنى يمر بالنقطة $(٤، ٠)$ بالتعويض في الدالة
 $٠ = ٤ - س - ٢٠$ $\therefore س = ٤$
- إحداثي ب هو $(س، ٠)$ بالتعويض في الدالة
 $٠ = ٤ - س - ٢٠$ $\therefore س = ٤$ $\therefore س = ٢ \pm$
 \therefore إحداثي ب $(٠، ٢)$ ، إحداثي ج $(٠، ٢-)$
- مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$
 $= \frac{1}{2} \times ٤ \times ٤ = ٨$ وحدات مربعة

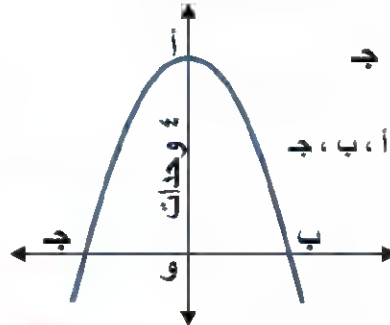
متفوقين

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث:

د(س) = م - س^٢ فإذا كان أ و ٤ وحدات فأوجد:

(١) قيمة م (٢) إحداثي ب ، ج

(٣) مساحة المثلث الذي رؤوسه أ ، ب ، ج



واجب على الوحدة الأولى

الدالة	حاصل ضرب الديكارتى
<p>١ إذا كان بيان الدالة $D = \{(3,1), (5,2), (7,3)\}$ ، $\{(9,4), (11,5)\}$ ، (١) اكتب مجال ومدى الدالة د (٢) اكتب قاعدة الدالة</p>	<p>١ إذا كانت (س - ١) = (٢٩ ، ٤) = ص + ٢ فأوجد قيمة س + ٢ ص</p>
<p>٢ إذا كانت د (س) = س^٢ - ٣ س ، ر (س) = س - ٣ (١) أوجد د(٢) + ر(٢) (٢) اثبت أن د(٣) + ر(٣) = صفر</p>	<p>٢ إذا كانت س = {٢ ، ١} ، ص = {٥ ، ٢} ، ع = {٥ ، ٤} ، فأوجد: (١) (س - ص) × ع (٢) ن(ع)</p>
<p>٣ إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٥ س + ٤ يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ب) ، فأوجد قيمة ب</p>	<p>٣ إذا كانت س × ص = { (٦،٢) ، (٩،٢) ، (٦،٣) } ، فأوجد: { (٩،٥) ، (٦،٥) ، (٩،٣) } ، (١) س ، ص (٢) ص × س (٣) ن(س)</p>
<p>٤ إذا كانت د (س) = ٣ س + ب ، د(٤) = ١٣ فأوجد قيمة ب</p>	<p>العلاقة</p>
<p>٥ إذا كان المستقيم الذى يمثل الدالة د: ح ح حيث د (س) = ٢ س + أ ، د(٣) = ٩ (١) أوجد قيمة أ (٢) أوجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور السيني</p>	<p>١ إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٥} ، ص = {١ ، ٤ ، ٦} ، وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى: أ = ١ ب لكل أ د س ، ب د ص (١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي (٢) هل ع دالة أم لا؟ ولماذا؟</p>
<p>التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود</p>	<p>٢ إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {ص: ص ≥ ٢ ، ص > ٩} ، وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى: (أ = ١/٢) ب لكل أ د س ، ب د ص (١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي (٢) بين أن ع دالة وأوجد مداها؟</p>
<p>١ مثل بيانيا الدالة د(س) = ٢ س + ١ ثم أوجد نقط تقاطع المستقيم الممثل للدالة مع محوري الإحداثيات</p>	<p>٣ إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، ١/٣ ، ١/٥} ، وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن أ ب = ١ لكل أ د س ، ب د ص (١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي (٢) بين أن ع دالة واكتب مداها</p>
<p>٢ ارسم منحنى الدالة د: د (س) = س^٢ + ١ متخذا س د [- ٢ ، ٢] ومن الرسم عين: (١) نقطة رأس المنحنى (٢) معادلة محور التماثل (٣) القيمة الصغرى أو العظمى</p>	
<p>٣ مثل بيانيا منحنى الدالة د (س) = ٣ - س^٢ حيث س د [- ٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد: (١) معادلة محور التماثل (٢) القيمة العظمى أو الصغرى</p>	

اختبار على الوحدة الأولى

إعداد أ/ محمود عوض

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ إذا كانت النقطة (٣ ، ب - ٥) تقع على محور السينات فإن ب =
 (أ) ٢ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٨
- ٢ إذا كان $\{2\} \times \{أ، ب\} = \{(٤، ٢)، (٣، ٢)\}$ فإن أ - ب =
 (أ) ١ (ب) ١- (ج) $١ \pm$ (د) صفر
- ٣ الدالة د حيث د (س) = ٥س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة
 (أ) (٥، ٠) (ب) (٥، ٥) (ج) (٠، ٥) (د) (٠، ٠)
- ٤ إذا كانت ص = { صفر } فإن ن (ص) =
 (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٤

السؤال الثاني:

(أ) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ } وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث أع ب تعنى $أ = \frac{١}{٣} ب$ لكل أ د س ، ب د ص

اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وبين أن ع دالة واكتب مداها.

(ب) مثل بيانيا الدالة الخطية د: ح — ح حيث د (س) = س + ٢

وأوجد نقط تقاطع المستقيم مع محوري الإحداثيات

السؤال الثالث:

(أ) إذا كان (٢س ، ٤) = (٨ ، ص + ١) فأوجد قيمة $\sqrt{٢س + ٢ص}$

(ب) إذا كان $س \times ص = \{(٢، ١)، (٣، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٢)\}$

فأوجد: (١) س - ١ (٢) ص - ١

السؤال الرابع:

(أ) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٣س + ٤ يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (أ ، ٥ - ٥)

فأوجد: (١) د $(\frac{٢}{٣})$ (٢) قيمة أ

(ب) مثل بيانيا الدالة د حيث د (س) = ٢س - ١ حيث س $\in [-٢ ، ٢]$ ومن الرسم استنتج:

(١) معادلة محور التماثل (٢) القيمة الصغرى للدالة

◆ النسبة هي مقارنة بين كميتين من نفس النوع، النسبة بين أ، ب تكتب أ : ب أو $\frac{أ}{ب}$

يسمى أ : مقدم النسبة ، ب : تالي النسبة ، أ ، ب معا : حدى النسبة

◆ النسبة لا تتغير إذا ضرب حديها في عدد حقيقى (ما عدا الصفر)

$$\text{فمثلا: } \frac{٦}{١٠} = \frac{٢ \times ٣}{٢ \times ٥} = \frac{٣}{٥}$$

◆ النسبة تتغير إذا أضيف أو طرح من حديها عدد حقيقى (ما عدا الصفر)

$$\text{فمثلا: } \frac{٥}{٧} \neq \frac{٢+٣}{٢+٥} \neq \frac{٣}{٥} \text{ تغيرت النسبة}$$

◆ إذا كانت النسبة بين عددين ٣ : ٤ فإننا نفرض أن العددين هما ٣م ، ٤م

٢ أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١

فإنها تصبح ٢ : ٣

الحل

نفرض أن العدد = س

$$\frac{٢}{٣} = \frac{٧+س}{١١+س} \text{ (مقص)}$$

$$٢٢ + ٢س = ٢١ + ٣س$$

$$٢١ - ٢٢ = ٣س - ٢س$$

$$\therefore ١ = س \therefore \text{العدد هو ١}$$

١ عددين صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ ، إذا طرح منهما ٥

أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ ، أوجد العددين؟

نفرض أن العددين هما ٣م ، ٧م

$$\therefore \frac{١}{٣} = \frac{٥-٣م}{٥-٧م} \text{ (مقص)}$$

$$٥ - ٧م = ١٥ - ٣م$$

$$١٥ + ٥ = ٧م - ٣م$$

$$١٠ = ٤م \quad ٥ = م$$

$$\therefore \text{العدد الأول} = ٣م = ٣ \times ٥ = ١٥$$

$$\therefore \text{العدد الثانى} = ٧م = ٧ \times ٥ = ٣٥$$

٤ أوجد العدد الموجب الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من

حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$

الحل

نفرض أن العدد = س \therefore ثلاثة أمثاله = ٣س

$$\frac{٢}{٣} = \frac{٤٩-٣س}{٦٩-٣س} \text{ (مقص)}$$

$$٢(٦٩ - ٣س) = ٣(٤٩ - ٣س)$$

$$١٣٨ - ٦س = ١٤٧ - ٩س$$

$$١٣٨ - ١٤٧ = ٩س - ٦س$$

$$٣ = ٣س \therefore ١ = س$$

٣ أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى

حدى النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥

الحل

نفرض أن العدد = س \therefore مربعه = س^٢

$$\frac{٣}{٥} = \frac{٥+س^٢}{١١+س^٢} \text{ (مقص)}$$

$$٣(١١ + س^٢) = ٥(٥ + س^٢)$$

$$٣٣ + ٣س^٢ = ٢٥ + ٥س^٢$$

$$٣٣ - ٢٥ = ٥س^٢ - ٣س^٢$$

$$٨ = ٢س^٢ \quad ٤ = س^٢ \quad \therefore \text{العدد الموجب هو ٢}$$

التناسب

◆ التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر

فمثلاً : $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ يسمى تناسب والكميات أ ، ب ، ج ، د تسمى كميات متناسبة

◆ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ حيث :

أ : الأول المتناسب ، ب : الثانى المتناسب ، ج : الثالث المتناسب ، د : الرابع المتناسب
أ ، د : الطرفين ، ب ، ج : الوسطين

خواص التناسب

خاصية ١ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

أي أنه إذا كانت $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ فإن : $أ \times د = ب \times ج$

وغالباً ما تستخدم عند وجود مجهول واحد في التناسب مثل : $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{٦}$ أو $\frac{س - ٢}{٣ + س} = \frac{٧ + س}{١١ + س}$

تدريب

أوجد الثانى المتناسب للأعداد ٦ ، ٤ ، ٢

مثال ١

أوجد الرابع المتناسب للأعداد ١٦ ، ١٢ ، ٤ ، س

الحل

نفرض أن الرابع المتناسب هو س

الكميات هي : ١٦ ، ١٢ ، ٤ ، س

$$\frac{١٦}{س} = \frac{٤}{١٢} \therefore$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$١٦ \times ١٢ = س \times ٤$$

$$س = \frac{١٦ \times ١٢}{٤} = ٤٨$$

∴ الرابع المتناسب هو ٤٨

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ فإن $أ = ج م$ ، $ب = د م$

خاصية ٤

♦ أي أن : إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = م$ ومنها $أ = ج م$ ، $ب = د م$ يمكن أيضا استنتاج أن : $أ = ب م$ ، $ج = د م$ ولو استخدمت أي استنتاج منهم صح

♦ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فإن : $أ = ٣ م$ ، $ب = ٥ م$ ومن الخطأ أن تقول $أ = ٣$ ، $ب = ٥$ وتنسى الثابت

♦ إذا كان $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ فإن : $س = ٣ م$ ، $ص = ٤ م$ ، $ع = ٥ م$

١ تكوين تناسب

٢ إيجاد قيم

٣ التعويض بالقيم

٤ إخراج العامل المشترك

٥ الاختصار



**خطوات
حل مسائل
التناسب**

ملاحظات

١ للتسهيل هتلفى خطوة العامل المشترك في حالتين:

- إذا كانت الحدود مضروبة : مثل $ج م \times ج$ فقط اضرب فتكون $ج^٢ م$
- إذا كانت الحدود متشابهة : مثل $١٢ م + ١٠ م$ فقط اجمع فتكون $٢٢ م$

٢ عند التعويض: إذا كان $أ = ب م$ فإن $أ^٢ = ب^٢ م$ (ربع ب ، م)

٣ لإثبات أن أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة نثبت أن $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ (استخدم المقص في البداية)

٤ لو هتختصر حاجة في البسط مع حاجة في المقام لازم الاتنين يكونوا مضروبين وغير مرتبطين بجمع أو طرح

مثال ١

إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة

$$\text{فاثبت أن: } \frac{أ - ٣}{ج + ٥} = \frac{ب - ٣}{د + ٥}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = م \quad أ = ج م ، ب = د م$$

$$\frac{أ - ٣}{ج + ٥} = \frac{ب - ٣}{د + ٥} \quad \text{الأيمن}$$

$$\frac{ج م - ٣}{ج + ٥} = \frac{د م - ٣}{د + ٥}$$

$$\frac{ج م - ٣}{ج + ٥} = \frac{د م - ٣}{د + ٥} \quad \text{الأيمن}$$

$$\frac{ج م - ٣}{ج + ٥} = \frac{د م - ٣}{د + ٥}$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٢

إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في كميات متناسبة

$$\text{فاثبت أن: } \frac{أ - ٣}{ب - ٣} = \frac{ج - ٣}{د - ٣}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = م$$

$$أ = ج م ، ب = د م$$

$$\frac{أ - ٣}{ب - ٣} = \frac{ج - ٣}{د - ٣} \quad \text{الأيمن}$$

$$\frac{ج م - ٣}{د م - ٣} = \frac{ج - ٣}{د - ٣} \quad \text{الأيمن}$$

$$\frac{ج م - ٣}{د م - ٣} = \frac{ج - ٣}{د - ٣}$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٣

إذا كانت $\frac{ع}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س}{٣}$

$$\text{فاثبت أن: } \frac{١}{٢} = \frac{ع - ٢ص}{ع + ٢ص - ٣س}$$

الحل

$$\frac{ع}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س}{٣} = م$$

$$\frac{ع - ٢ص}{ع + ٢ص - ٣س} = \frac{١}{٢} \quad \text{الأيمن}$$

$$\frac{ع - ٢ص}{ع + ٢ص - ٣س} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{ع - ٢ص}{ع + ٢ص - ٣س} = \frac{١}{٢}$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٤

إذا كانت $\frac{ع}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س}{٣}$ فاثبت أن:

$$\sqrt{٣س^٣ + ٣ص^٣ + ٣ع^٣} = ٢س + ٣ص$$

الحل

$$\frac{ع}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س}{٣} = م$$

$$\sqrt{٣س^٣ + ٣ص^٣ + ٣ع^٣} = ٢س + ٣ص \quad \text{الأيمن}$$

$$\sqrt{٣س^٣ + ٣ص^٣ + ٣ع^٣} = ٢س + ٣ص$$

$$\sqrt{٣س^٣ + ٣ص^٣ + ٣ع^٣} = ٢س + ٣ص$$

$$\sqrt{٣س^٣ + ٣ص^٣ + ٣ع^٣} = ٢س + ٣ص$$

$$\sqrt{٣س^٣ + ٣ص^٣ + ٣ع^٣} = ٢س + ٣ص$$

$$\sqrt{٣س^٣ + ٣ص^٣ + ٣ع^٣} = ٢س + ٣ص$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٥

إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة

$$\frac{ج}{ب} = \frac{أ}{د - ج}$$

الحل

$$\frac{ج}{ب} = \frac{أ}{د - ج}$$

$$ج \cdot د = ب \cdot أ$$

$$\frac{ج \cdot د}{ج} = \frac{ب \cdot أ}{ج} = \frac{أ}{د - ج}$$

$$\frac{ج \cdot د}{ج} = \frac{ب \cdot أ}{ج} = \frac{أ}{د - ج}$$

مثال ٦

إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ فأوجد قيمة:

$$\frac{س^٣ + ص^٣}{٦ص - س}$$

الحل

$$س = ٢م ، ص = ٣م$$

$$\frac{س^٣ + ص^٣}{٦ص - س} = \frac{٢^٣م^٣ + ٣^٣م^٣}{٦ \cdot ٣م - ٢م}$$

$$= \frac{٨م^٣ + ٢٧م^٣}{١٨م - ٢م}$$

$$= \frac{٣٥م^٣}{١٦م} = \frac{٣٥}{١٦}م^٢$$

تكملة محمود عوض

معلم أول رياضيات

مثال ٧

$$\frac{أ}{ب} = \frac{٢ج - ٢د}{٢ج + ٢د}$$

فأثبت أن: أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة

الحل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$أ(٢ج + ٢د) = ب(٢ج - ٢د)$$

$$٢أج + ٢أد = ٢بج - ٢بد$$

$$٢أج - ٢بج = -٢أد + ٢بد$$

$$٢ج(أ - ب) = ٢د(ب - أ)$$

$$\frac{٢ج}{٢د} = \frac{٢ج}{٢د} = \frac{٢ج}{٢د} = \frac{٢ج}{٢د}$$

$$\frac{٢ج}{٢د} = \frac{٢ج}{٢د} = \frac{٢ج}{٢د} = \frac{٢ج}{٢د}$$

مثال ٨

إذا كان أ : ب : ج = ٥ : ٧ : ٣

وكان أ + ب = ٢٧,٦

فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، ج

$$أ = ٥م ، ب = ٧م ، ج = ٣م$$

بالتعويض في أ + ب = ٢٧,٦

$$٢٧,٦ = ٥م + ٧م$$

$$٢٧,٦ = ١٢م$$

$$٢,٣ = م$$

$$١١,٥ = ٢,٣ \times ٥ = ٥م = أ$$

$$١٦,١ = ٢,٣ \times ٧ = ٧م = ب$$

$$٦,٩ = ٢,٣ \times ٣ = ٣م = ج$$

خاصية ه إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و} = \dots$ فإن $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}} = \text{إحدى النسب}$

خاصية ه

■ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و}$ فإنه يمكن ضرب أي نسبة في أي عدد ثم جمع المقدمات وجمع التوالى

فمثلاً: يمكن ضرب النسبة الأولى $\times 2$ والنسبة الثانية $\times 1$ وضرب النسبة الثالثة $\times 3$ ثم بالجمع

$$\text{فيكون: } \frac{أ \cdot 2 + ج + هـ \cdot 3}{ب \cdot 2 + د + و \cdot 3} = \text{إحدى النسب}$$

■ عايز تعرف هتضرب ازاي وفي كام؟ بص على بسط ومقام المطلوب إثباه في المسألة وانت هتعرف
■ ما تيجوا نشوف !

مثال ١٠

$$\text{إذا كان } \frac{أ + ب}{٣} = \frac{ب + ج}{٦} = \frac{ج + د}{٥} \text{ فاثبت أن: } \frac{أ + ب + ج}{٧} =$$

الحل

للوصول للبسط المطلوب نجمع النسبة الأولى + الثانية + الثالثة

$$\frac{أ + ب + ب + ج + ج + د}{٣ + ٦ + ٥} = \frac{أ + ٢ب + ٢ج + د}{١٤}$$

$$\frac{أ + ٢ب + ٢ج + د}{١٤} = \frac{أ + ب + ج}{٧} = \text{إحدى النسب} \quad \text{①} \leftarrow$$

للحصول على المقام نجمع النسبتين اللتي فيهم أ = النسبة الثانية

$$\frac{أ + ب + ج + ج + د - ب - ب}{٣ + ٥ + ٦} = \frac{أ + ٢ج + د}{١٤}$$

$$\frac{أ + ٢ج + د}{١٤} = \frac{أ}{٧} = \text{إحدى النسب} \quad \text{②} \leftarrow$$

من ١، ٢ ينتج أن

$$\frac{أ + ب + ج}{٧} = \frac{أ}{٧} \therefore \frac{أ + ب + ج}{٧} = \frac{أ}{٧}$$

مثال ٩

$$\text{إذا كان } \frac{س}{٢ + أ} = \frac{ص}{٢ - ب} = \frac{ع}{٢ - ج}$$

$$\text{فاثبت أن: } \frac{٢س + ص + ع}{٢ + أ + ٤ب + ٦ج} = \frac{٢ص + ص + ع}{٢ - ب - ج}$$

الحل

عايزين نوصل للبسط اللتي في الإثبات:

بضرب إحدى النسبة الأولى $\times 2$ والجمع مع الثانية

$$\text{إحدى النسب} = \frac{٢س + ص}{٢ + أ + ٤ب + ٦ج}$$

$$\frac{٢س + ص}{٢ + أ + ٤ب + ٦ج} = \text{إحدى النسب} \quad \text{①} \leftarrow$$

للحصول على البسط الثاني نضرب النسبة الأولى $\times 2$

والنسبة الثانية $\times 2$ وجمع النسب الثلاثة

$$\frac{٢س + ٢ص + ع}{٢ + أ + ٤ب + ٦ج + ٢ - ب - ج} = \frac{٢س + ٢ص + ع}{٢ + أ + ٣ب + ٥ج}$$

$$\frac{٢س + ٢ص + ع}{٢ + أ + ٣ب + ٥ج} = \text{إحدى النسب} \quad \text{②} \leftarrow$$

من ١، ٢ ينتج أن:

$$\frac{٢س + ٢ص + ع}{٢ + أ + ٣ب + ٥ج} = \frac{٢س + ص + ع}{٢ - ب - ج}$$

إذا كانت $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{ج}{٤} = \frac{٢ - أ - ب - ج}{٣}$ فأوجد قيمة س

مسألة مهمة

♦ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج فإن:

أ : الأول المتناسب ، ب : الوسط المتناسب ، ج : الثالث المتناسب

♦ الوسط المتناسب بين عددين $\sqrt{\pm}$ الأول \times الثالث

مثال: الوسط المتناسب بين ٢ ، ١٨ $\sqrt{\pm} = 18 \times 2 \sqrt{\pm} = 36 \sqrt{\pm}$

♦ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = م$

ومنها ب = ج م ، أ = ج م^٢

♦ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = م$

ومنها ج = د م ، ب = د م^٢ ، أ = د م^٣

ملاحظات هامة

١ التناسب المتسلسل يختلف عن التناسب العادي في خطوتين: تكوين التناسب وإيجاد القيم

٢ في التناسب المتسلسل نحسب قيم المقدمات بدلالة آخر تالي

٣ عند التعويض: إذا كان أ = ب م ، فإن أ^٢ = ب^٢ م^٢ (حط التربيع على ب ، م)
وإذا كان ب = د م ، فإن ب^٢ = د^٢ م^٢
وإذا كان أ = د م^٣ ، فإن أ^٢ = د^٢ م^٦

مثال ٢ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل

$$\text{فأثبت أن: } \frac{ج - أ}{أ} = \frac{د - ب}{ب}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = م$$

$$\therefore ج = د م ، ب = د م^2 ، أ = د م^3$$

$$\frac{ج - أ}{أ} = \frac{د م - د م^3}{د م^3} = \frac{د - د م^2}{د م^2} = \frac{ج - ب}{ب}$$

$$\frac{د}{م} = \frac{(1 - م^2) د}{(1 - م^2) د م^2} =$$

$$\frac{د}{م} = \frac{د \times د م^2}{د م^3} = \frac{ب}{أ} = \text{الأيسر}$$

$$\therefore \text{الأيمن} = \text{الأيسر}$$

مثال ١ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج

$$\text{فأثبت أن: } \frac{أ}{ج} = \frac{أ^2 + ب^2}{ب^2 + ج^2}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = م$$

$$\therefore ب = ج م ، أ = ج م^2$$

$$\frac{أ}{ج} = \frac{أ^2 + ب^2}{ب^2 + ج^2} = \frac{ج م^2 + ج م^4}{ج^2 + ج^2 م^2} = \text{الأيمن}$$

$$م = \frac{ج م^2 + ج م^4}{ج^2 + ج^2 م^2} =$$

$$\frac{أ}{ج} = \frac{ج م^2}{ج} = \frac{ب}{ج} = \text{الأيسر}$$

$$\therefore \text{الأيمن} = \text{الأيسر}$$

على قدر باطنيات قيم

مثال ٣ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل

$$\text{فأثبت أن: } \frac{أ}{ب} = \frac{أ^2 - ٢ج^2}{٢د^3 - ٢ج^2}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = م$$

$$ج = د م ، ب = د م^2 ، أ = د م^3$$

$$\text{الأيمن} = \frac{أ^2 - ٢ج^2}{٢د^3 - ٢ج^2} = \frac{د^2 م^6 - ٢د^2 م^4}{٢د^3 - ٢د^2 م^2}$$

$$= \frac{د^2 م^4 (م^2 - ٢)}{٢د^2 (١ - م^2)} = \frac{د^2 م^4 (٣ - م^2)}{٢د^2 (١ - م^2)}$$

$$\text{الأيسر} = \frac{ب}{د} = \frac{د م^2}{د} = م^2$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٤ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل

$$\text{فأثبت أن: } \frac{أ + ج}{ب} = \frac{أب - ج د}{٢ج - ٢ب}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = م$$

$$ج = د م ، ب = د م^2 ، أ = د م^3$$

$$\text{الأيمن} = \frac{أب - ج د}{٢ج - ٢ب} = \frac{د م^3 \times د م^2 - د م \times د م^2}{٢د م^2 - ٢د م}$$

$$= \frac{د^2 م^5 - د^2 م^3}{٢د م^2 (١ - م)} = \frac{د^2 م^3 (م^2 - ١)}{٢د م^2 (١ - م)}$$

$$= \frac{د^2 م^3 (١ + م)(١ - م)}{٢د م^2 (١ - م)} = \frac{د م (١ + م)}{٢}$$

$$\text{الأيسر} = \frac{أ + ج}{ب} = \frac{د م^3 + د م}{د م^2} = \frac{د م (١ + م^2)}{د م^2} = \frac{١ + م^2}{م}$$

$$\frac{١ + م^2}{م} = \frac{د م (١ + م)}{٢} \quad \therefore \text{الأيمن} = \text{الأيسر}$$

مثال ٥ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج

$$\text{فأثبت أن: } \frac{ب}{أ - ج} = \frac{أ - ب}{ب + ج}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = م$$

$$ج = د م ، ب = د م^2 ، أ = د م^3$$

$$\text{الأيمن} = \frac{أ - ب}{ب + ج} = \frac{د م^3 - د م^2}{د م^2 + د م} = \frac{د م^2 (م - ١)}{د م (١ + م)}$$

$$= \frac{د م (١ - م)}{١ + م} = \frac{د م (١ - م)(١ + م)}{(١ + م)(١ + م)}$$

$$\text{الأيسر} = \frac{ب}{أ - ج} = \frac{د م^2}{د م^3 - د م} = \frac{د م^2}{د م (١ - م)} = \frac{١}{١ - م}$$

$$\frac{١}{١ - م} = \frac{د م (١ - م)}{(١ + م)(١ - م)}$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٦ إذا كانت ص وسطا متناسبا بين س ، ع

$$\text{فأثبت أن: } \frac{س}{ص + س} = \frac{س ع}{ص + ص ع}$$

الحل

$$\frac{س}{ص} = \frac{ص}{ع} = م$$

$$ص = ع م ، س = ع م^2$$

$$\text{الأيمن} = \frac{س ع}{ص + ص ع} = \frac{ع م^2 \times ع}{ع م + ع م^2} = \frac{ع^2 م^2}{ع (١ + م)}$$

$$= \frac{ع م^2}{١ + م} = \frac{ع م^2}{(١ + م)}$$

$$\text{الأيسر} = \frac{س}{ص + س} = \frac{ع م^2}{ع م + ع م^2} = \frac{ع م^2}{ع (١ + م)}$$

$$\frac{ع م^2}{١ + م} = \frac{ع م^2}{ع (١ + م)} \quad \therefore \text{الأيمن} = \text{الأيسر}$$

♣ إذا كانت ص تتغير طردياً مع س فإنها تكتب: ص \propto س ومنها يكون:

الإيجاد قيمة

$$\frac{ص_1}{س_1} = \frac{ص_2}{س_2}$$

الحساب الثابت

$$\frac{ص}{س} = م$$

الإيجاد العلاقة

$$ص = م س$$

♦ العلاقة الطردية يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

♣ إذا كانت ص \propto س فإن الثابت م $= \frac{ص}{س}$ والعلاقة هي ص = م س

♦ لإثبات أن ص \propto س نثبت أن ص = (ثابت) س

مثال ٢ إذا كانت ص تتغير طردياً بتغير س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤

أوجد : (١) العلاقة بين س ، ص
(٢) قيمة س عندما ص = ٢٠

الحل

ص \propto س \therefore ص = م س

$$\frac{١}{٣} = \frac{١٤}{٤} = \frac{ص}{س} = م$$

العلاقة هي: ص = $\frac{١}{٣}$ س

$$\frac{١}{٣} = \frac{٢٠}{س}$$

$$\therefore س = ٣ \times ٢٠ = ٦٠$$

مثال ١ إذا كانت ص \propto س وكانت ص = ٦ عندما س = ٣

أوجد : (١) العلاقة بين س ، ص
(٢) قيمة ص عندما س = ٥

الحل

ص \propto س \therefore ص = م س

$$\frac{٦}{٣} = \frac{ص}{س} = م$$

العلاقة هي: ص = ٢ س

بالتعويض عن س = ٥

$$\therefore ص = ١٠ = ٥ \times ٢$$

مثال ٣ تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طردياً مع الزمن، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كليومتراً في ٦ ساعات، فكم كيلومتراً تقطعها السيارة في ١٠ ساعات

الحل

نرمز للمسافة بالرمز ف والزمن بالرمز ز
ف = ١٥٠ ، ز = ٦
ف = ؟ ، ز = ١٠

ف \propto ز $\therefore \frac{ف_1}{ز_1} = \frac{ف_2}{ز_2}$

$$\frac{١٥٠}{٦} = \frac{ف}{١٠}$$

$$\therefore ف = \frac{١٥٠ \times ١٠}{٦} = ٢٥٠ \text{ كيلومتر}$$

مثال ٤ إذا كان: $\frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2} = \frac{ص}{س}$ فاثبت أن: ص \propto س

الحل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$ص_1 س_1 - ص_2 س_2 = ص س$$

$$ص_1 س_1 = ص س$$

$$ص_1 س_1 = ص س$$

$$\frac{ص_1}{س_1} = \frac{ص}{س}$$

$$\therefore ص \propto س$$

التغير العكسي

♣ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س فإنها تكتب: ص $\propto \frac{1}{س}$ ومنها يكون:

للإيجاد قيمة

$$\frac{ص١}{س١} = \frac{ص٢}{س٢}$$

لحساب الثابت

$$م = ص \times س$$

للإيجاد العلاقة

$$ص = م \times س$$

♦ يمكن كتابة العلاقة العكسية على الصورة ص = م / س أو ص = م × س

♦ لإثبات أن ص $\propto \frac{1}{س}$ نثبت أن ص × س = ثابت

مثال ١

إذا كانت ص $\propto \frac{1}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢
أوجد : (١) العلاقة بين س ، ص
(٢) قيمة ص عندما س = ١,٥

الحل

ص $\propto \frac{1}{س}$ ∴ ص × س = م

٦ = ٢ × ٣ = ص × س = م

العلاقة هي : ص × س = ٦

$$\frac{ص١}{س١} = \frac{ص٢}{س٢} \quad \frac{٣}{٢} = \frac{ص}{١,٥}$$

ص = ١,٥ × ٦ = ٩ ∴ ص = ٩

مثال ٢

من بيانات الجدول التالي أجب:

٦	٤	٢	س
٢	٣	٦	ص

(١) بين نوع التغير بين ص ، س
(٢) أوجد ثابت التناسب
(٣) أوجد قيمة ص عندما س = ٣

الحل

١ نوع التغير عكسي (لأنه كلما زادت س نقصت ص)

٢ ثابت التناسب = ص × س = ٦ × ٢ = ١٢

٣ بالتعويض عن س = ٣ في العلاقة ص × س = ١٢

ص × ٣ = ١٢ ∴ ص = ٤

مثال ٣

إذا كان : س^٢ - ١٤س + ٤٩ = ٠
فأثبت أن: ص $\propto \frac{1}{س}$

الحل

بتحليل المقدار المربع الكامل

(س^٢ - ١٤س + ٤٩) = (س - ٧)^٢ = ٠

س - ٧ = ٠ ∴ س = ٧

س^٢ = ٧

∴ ص $\propto \frac{1}{س}$

مثال ٤

إذا كان: ص = ٩ - أ، ص $\propto \frac{1}{س}$ وكان أ = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$
فأوجد العلاقة بين س، ص ثم استنتج قيمة ص عندما س = ١

الحل

ص $\propto \frac{1}{س}$ ∴ ص × س = م

بالتعويض عن ص = ٩ - أ

(٩ - أ) × س = م ∴ م = (٩ - ١٨) × ($\frac{٢}{٣}$)

∴ م = ٤ × ٩ = ٣٦

∴ العلاقة هي ص × س = ٣٦

عندما س = ١ ص × ١ = ٣٦ ∴ ص = ٣٦

أسئلة اختر على الوحدة الثانية

١ إذا كان $٣ = أ = ٤ ب$ فإن $أ : ب =$

- (أ) $٤ : ٣$ (ب) $٣ : ٤$ (ج) $٧ : ٣$ (د) $٤ : ٧$

٢ إذا كان $٥ = أ - ٢ ب = ٠$ فإن $\frac{أ}{ب} =$

- (أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (ج) ١٠ (د) ٥

٣ إذا كان $\frac{١}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فإن $\frac{١٥}{٣ب} =$

- (أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (ج) $\frac{٢٥}{٩}$ (د) ١

٤ الرابع المتناسب للأعداد ٣ ، ٦ ، ٨ هو

- (أ) ٤ (ب) ٧ (ج) ١٦ (د) ٢٠

٥ إذا كانت أ ، ٤ ، ب ، ٩ كميات متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} =$

- (أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٩}$ (ج) $\frac{٩-}{٤}$ (د) $\frac{٤-}{٩}$

٦ إذا كان: أ ، ٢ ، ب ، ٣ كميات متناسبة فإن $أ : ب =$

- (أ) $١ : ٢$ (ب) $١ : ٣$ (ج) $٢ : ٣$ (د) $٢ : ٣$

٧ إذا كان $\frac{أ}{٥} = \frac{ب}{٤} = \frac{أ+ب}{ك}$ فإن ك =

- (أ) ٥ (ب) ٤ (ج) ٩ (د) ١

٨ الوسط المتناسب بين ٣ ، ٢٧ يساوى

- (أ) ٩ (ب) $٩-$ (ج) $٩ \pm$ (د) ١٥

٩ الثالث المتناسب للعددين ٥ ، ٨٠ يساوى

- (أ) ١٠٠ (ب) ٨٠ (ج) ٤٠ (د) ٢٠

٩ إذا كان ٣ س ص = ٨ فإن

- (أ) ٣٠ س ص (ب) ٣٠ ص س (ج) ٣٠ س ٨ ص (د) ٣٠ س ص

١٥ إذا كان ص ٣٠ س وكان ص = ٢ عندما س = ٨ فإن ص = ٣ عندما س =

- (أ) ١٦ (ب) ١٢ (ج) ٢٤ (د) ٦

١٥ العلاقة التي تمثل تغيراً طردياً بين المتغيرين س ، ص هي

- (أ) $٥ = ص$ (ب) $٣ + ص = س$ (ج) $\frac{٤}{ص} = \frac{س}{٣}$ (د) $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٥}$

١٦ إذا كان س ص = ٧ فإن ص ٣٠

- (أ) $\frac{١}{س}$ (ب) $٧ - س$ (ج) $س$ (د) $٧ + س$

١٧ إذا كانت ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$ في تناسب متسلسل ، فإن س^٢ ص =

- (أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٧ (د) ٩

واجب على الوحدة الثانية

النسبة والتناسب	التناسب المتسلسل
١ أوجد العدد الذي إذا أضيف مربعه إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥	١ إذا كانت الكميات أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل فثبت أن $\frac{أ + ٢}{ب} = \frac{٢ + د}{ج}$
٢ عدان النسبة بينهما ٤ : ٥ وإذا طرح من كل منهما ٦ أصبحت النسبة بينهما ٢ : ٣ أوجد العددين	٢ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل فثبت أن $\frac{أ}{ب + د} = \frac{٢}{٢ + د + ج}$
٣ أوجد الثالث المتناسب للكميات ٨ ، ٩ ، ٢٧	٣ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج فثبت أن $\frac{٢}{ب} = \frac{٢ - ٣}{٢ - ٣}$
٤ أوجد العدد الذي إذا أضيف للأعداد ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ أصبحت أعدادا متناسبة	٤ أوجد العدد الذي إذا أضيف للأعداد ١ ، ٥ ، ٩ ، ١٧ فإنها تكون تناسبا متسلسلا
٥ إذا كانت ٣ = أ = ٢ ب فأوجد قيمة $\frac{أ - ٣}{ب + ١٢}$	التغير الطردى والعكسي
٦ إذا كانت $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ فأوجد قيمة المقدار: $\frac{ص٢ - ع}{ع + ٣س - ٢ص}$	١ إذا كانت ص ٣٠ وكانت ص = ٢٠ عندما س = ٧ فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١٤
٧ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة فثبت أن: $\frac{أ - ٣}{ب - ٢} = \frac{٣ - ١}{٢ - ١}$	٢ إذا كانت أ ٣٠ ب وكانت أ = ١٠ عندما ب = ٥ فأوجد: (١) العلاقة بين أ ، ب (٢) قيمة ب عندما أ = ٤
٨ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة فثبت أن: $\frac{أ - ٢}{ب - ١} = \frac{٢ - ١}{١ - ٠}$	٣ إذا كانت ص ٣٠ $\frac{١}{س}$ وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ فأوجد: (١) العلاقة بين ص ، س (٢) قيمة س عندما ص = ١٦
٩ إذا كان $\frac{أ}{ص + ٤} = \frac{ب}{س - ٤}$ فثبت أن: $\frac{أ + ٣}{ص - ٣} = \frac{ب + ٣}{س - ٣}$	٤ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت ص = ٢١ عندما س = ٤ فأوجد قيمة ص عندما س = ٧
١٠ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٢ - ٢}{٢ - ٢}$ فثبت أن أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة	٥ إذا كانت $\frac{أ + ٢}{ب} = \frac{٣ + ج}{٣}$ فثبت أن أ ٣٠ ج

اختبار على الوحدة الثانية

إعداد أ / محمود عوض

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان ١ ، س ، ٤ في تناسب متسلسل فإن س =
 (أ) ١ ± (ب) ٢ ± (ج) ٤ ± (د) ٣ ±

٢ إذا كان $\frac{1}{4} = \frac{ب}{3}$ فإن $\frac{ب}{3} = \frac{أ - ب}{ب + أ}$
 (أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{5}$

٣ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت $\sqrt{ص} = \sqrt{ص}$ عندما ص = $\frac{1}{\sqrt{ص}}$ فإن ثابت التناسب =
 (أ) ٥ (ب) ٣٥ (ج) $\frac{5}{\sqrt{ص}}$ (د) $\frac{1}{5}$

٤ إذا كانت أ ، ب ، ٢ ، ٣ كميات متناسبة فإن $\frac{ب}{أ} = \frac{.....}{.....}$
 (أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) ٣ (د) ٢

السؤال الثاني:

(أ) إذا كانت ص تتغير عكسيا بتغير س وكانت ص = ٢ عندما س = ٦
 فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٣

(ب) إذا كانت ٥ = أ = ٣ = ب فأوجد قيمة $\frac{٩ + ١٧}{٢ + ٤}$

السؤال الثالث:

(أ) إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج فثبت أن : $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{ب + ج}{ج}$

(ب) إذا كانت ص ٣٥ س وكانت ص = ٣ عندما س = ٤ فأوجد:
 (١) العلاقة بين ص ، س (٢) قيمة ص عندما س = ٨

السؤال الرابع:

(أ) أوجد الرابع المتناسب للأعداد ١٨ ، ٥ ، ٣

(ب) إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة فثبت أن $\frac{أ + ٢}{ب + ٣} = \frac{٢ - ج}{٣ - د}$

انتهت الأسئلة

التشتت

◆ التشتت هو التباعد أو الاختلاف

◆ من مقاييس التشتت: المدى ، الانحراف المعياري

المدى



◆ هو أبسط مقاييس التشتت وأسهلها. وهو الفرق بين أكبر القيم وأصغرها.

$$\text{المدى} = \text{أكبر قيمة} - \text{أصغر قيمة}$$

◆ مثال: المدى للقيم ٢٣، ٢٢، ١٥، ١٨، ١٧، ١٧ هو ٨ = ٢٣ - ١٥

الانحراف المعياري σ 

◆ هو الجذر التربيعي لموجب متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي

◆ الانحراف المعياري هو أكثر مقاييس التشتت انتشاراً وأدقها.

◆ إذا تساوت جميع المفردات فإن : الانحراف σ = صفر والمدى = صفر

نص
معلم أول رياضيات
محمود عوض

حساب الانحراف المعياري للجدول التكراري

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مج (س - س) }^2 \text{ ك}}{\text{مج ك}}}$$

حيث: $\bar{س}$ الوسط الحسابي ، ك التكرار

$$\text{لحساب الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مج (س} \times \text{ك)}}{\text{مج ك}}$$

ملاحظات للحل

❖ تكون جدول من ٦ أعمدة

❖ العمود الأول س نكتب فيه أرقام الصف الأول من المسألة

❖ العمود الثاني ك نكتب فيه أرقام الصف الثاني من المسألة

❖ نملأ أول ثلاثة أعمدة ثم نحسب الوسط $\bar{س}$ ثم نكمل الجدول

حساب الانحراف المعياري لمجموعة من القيم

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مج (س - س) }^2 \text{ ن}}{\text{ن}}}$$

حيث: $\bar{س}$ الوسط الحسابي ، ن عدد القيم

$$\text{لحساب الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد هم}}$$

ملاحظات للحل

◆ تكون جدول مكون من ٣ أعمدة

◆ العمود الأول س : نكتب فيه القيم التي في المسألة

◆ نحسب الوسط $\bar{س}$ قبل أن نملأ الجدول

مثال ١

احسب الانحراف المعياري للقيم:

١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

الحل

الوسط $\bar{س} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$

$$٢٠ = \frac{١٠٠}{٥} = \frac{٢٧+٢٠+٥+٣٢+١٦}{٥} =$$

س	س - $\bar{س}$	(س - $\bar{س}$) ^٢
١٦	٤ - ٢٠ = ١٦	١٦
٣٢	١٢ = ٢٠ - ٣٢	١٤٤
٥	١٥ = ٢٠ - ٥	٢٢٥
٢٠	٠ = ٢٠ - ٢٠	٠
٢٧	٧ = ٢٠ - ٢٧	٤٩
مج	xxx	٤٣٤

$$٩,٣ = \frac{٤٣٤}{٥} \sqrt{\frac{\text{مج (س - $\bar{س}$)^٢}}{ن}} = \sigma$$

مثال ٢

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري

للتوزيع التكراري الآتي:

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦	١٠٠

الحل

س	ك	س × ك	س - $\bar{س}$	(س - $\bar{س}$) ^٢	(س - $\bar{س}$) ^٢ × ك
٠	٨	صفر	٢ - ٢٠ = ١٨	٣٢٤	٢٦٧٢
١	١٦	١٦	١ - ٢٠ = ١٩	٣٦١	٥٧٧٦
٢	٥٠	١٠٠	٠ = ٢٠ - ٢	٠	٠
٣	٢٠	٦٠	١ = ٢٠ - ٣	١	٢٠
٤	٦	٢٤	٢ = ٢٠ - ٤	٤	٢٤
مج	١٠٠	٢٠٠	xx	xx	٩٢

$$٢ = \frac{٢٠٠}{١٠٠} = \frac{\text{مج (س × ك)}}{\text{مج ك}} = \text{الوسط } \bar{س}$$

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مج (س - $\bar{س}$)^٢ × ك}}{\text{مج ك}}} = \sqrt{\frac{٩٢}{١٠٠}} = ٩,٣$$

تدريب

احسب الانحراف المعياري للقيم:

٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩ ، ٨

الحل

تدريب

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري

للتوزيع التكراري الآتي:

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

الحل

س	ك	س × ك	س - $\bar{س}$	(س - $\bar{س}$) ^٢	(س - $\bar{س}$) ^٢ × ك
مج			xx	xx	xx

حساب الانحراف المعياري للجدول التكراري ذي المجموعات

يجب بنفس قوانين وطريقة حل الانحراف المعياري للجدول التكراري البسيط مع اختلاف واحد فقط وهو:

◆ العمود الأول س نكتب فيه مركز المجموعة ويحسب كالتالي :

$$\text{مركز المجموعة} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{2}$$

تدريب احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري

للتوزيع التكراري الآتي:

عدد الكيلومترات	-١٠	-٢٠	-٣٠	٤٠-٥٠	المجموع
عدد السيارات	٢	٥	١١	٧	٤٠

الحل

مثال ٣ احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري

للتوزيع التكراري الآتي:

المجموعة	-١٠	-٤	-٨	-١٢	٢٠-١٦	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

الحل

نحسب مراكز المجموعات لنكتبها في عمود س

$$١٠ = \frac{٤ + ٠}{٢} = ٢م ، ٢ = \frac{٨ + ٤}{٢} = ٢م ، ٦ = \frac{١٢ + ٨}{٢} = ٣م ، ١٠ = \frac{٢٠ + ١٦}{٢} = ٣م$$

$$١٨ = \frac{١٦ + ١٢}{٢} = ١٤م ، ١٤ = \frac{٢٠ + ١٦}{٢} = ٣م$$

س	ك	س × ك	س - س	س - س	س - س
٢	٣	٦	٩,٦-	٩٢,١٦	٢٧٦,٤٨
٦	٤	٢٤	٥,٦-	٣١,٣٦	١٢٥,٤٤
١٠	٧	٧٠	١,٦-	٢,٥٦	١٧,٩٦
١٤	٢	٢٨	٢,٤	٥,٧٦	١١,٥٢
١٨	٩	١٦٢	٦,٤	٤٠,٩٦	٣٦٨,٦٤
مج	٢٥	٢٩٠	xx	xx	٨٠٠

$$\text{الوسط س} = \frac{\text{مج (س × ك)}}{\text{مج ك}} = \frac{٢٩٠}{٢٥} = ١١,٦$$

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مج (س - س)}^2}{\text{مج ك}}}$$

$$٥,٧ = \sqrt{\frac{٨٠٠}{٢٥}} =$$

أسئلة اختر على الإحصاء

- ١ الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يسمى
 (أ) المدى (ب) الوسط الحسابي (ج) الانحراف المعياري (د) المنوال
- ٢ المدى لمجموعة القيم ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ يساوي
 (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ١٢
- ٣ الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من البيانات هو
 (أ) المنوال (ب) الوسيط (ج) الوسط (د) المدى
- ٤ أسهل وأبسط مقاييس التشتت هو
 (أ) المنوال (ب) الوسيط (ج) المدى (د) الانحراف المعياري
- ٥ إذا كانت ١٨ هي أكبر مفردات مجموعة ما وكان المدى = ٦ فإن أصغر مفردات المجموعة =
 (أ) ٨ (ب) ١٢ (ج) ٢٤ (د) ٣٦

واجب على الإحصاء

- ١ احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦
- ٢ فيما يلي التوزيع التكراري لعدد الوحدات التالفة التي وجدت في ١٠٠ صندوق من الوحدات المصنعة
- | | | | | | | |
|---------------------|-----|----|----|----|----|----|
| عدد الوحدات التالفة | صفر | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
| عدد الصناديق | ٣ | ١٦ | ١٧ | ٢٥ | ٢٠ | ١٩ |
- أوجد الانحراف المعياري للوحدات التالفة

- ٣ التوزيع التكراري الآتي يبين درجات ٥٠ طالب في مادة الرياضيات

عدد الوحدات التالفة	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
عدد الصناديق	٢	٨	١٠	١٨	١٢	٥٠

أوجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع

تراكمى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ $\{1, 0\} - [3, 1] = \dots$ (أ) $[3, 1]$ (ب) $[3, 1]$ (ج) $[3, 1]$ (د) $\{3\}$

٢ مجموعة حل المعادلة $(س - 1)^2 = 9$ في ح هي (أ) $\{4\}$ (ب) $\{2\}$ (ج) $\{2, 4\}$ (د) $\{3\}$

٣ إذا كانت $س^2 = 34$ فإن س = (أ) 3 (ب) 4 (ج) 6 (د) 64

٤ إذا كانت $\frac{3}{4} = \frac{3}{س} + \frac{3}{4}$ فإن س = (أ) 2 (ب) 4 (ج) 3 (د) $\frac{3}{4}$

٥ ٢٠٪ من ١٠ جنيهات = جنيهه (أ) 2 (ب) 2,5 (ج) 5 (د) 20

٦ إذا كان س عددا سالبا فإن أكبر الأعداد التالية هو = (أ) $س + 3$ (ب) $3س$ (ج) $3 - س$ (د) $\frac{3}{س}$

٧ $(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = \dots$ (أ) 5 (ب) 3 (ج) 2 (د) 1

٨ إذا كان $أ^2 - ب^2 = 12$ ، $أ + ب = 3$ فإن $أ - ب = \dots$ (أ) 8 (ب) 4 (ج) 10 (د) 36

٩ $\{5, 1\} \cup [5, 1] = \dots$ (أ) $[5, 1]$ (ب) $[5, 1]$ (ج) $[5, 1]$ (د) $[5, 1]$

١٠ $س \cap ح = \dots$ (أ) $س \cap ح$ (ب) $س \cap ح$ (ج) $س \cup ح$ (د) $س \cup ح$

١١ المعكوس الضربى للعدد $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ هو (أ) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ (ب) $\sqrt[3]{6}$ (ج) $\sqrt[3]{2}$ (د) $\sqrt[3]{2}$